Aproximação de funções por série de Fourier-Bessel

Cintya Akemi Okawa - Universidade Estadual do Oeste do Paraná (UNIOESTE)
Sandro Marcos Guzzo - Universidade Estadual do Oeste do Paraná (UNIOESTE)

(*Recebido em 13/12/2021. Aceito em 20/12/2021. Publicado em 22/12/2021*)

Resumo: Algumas séries fornecem maneiras de representar funções relativamente complicadas em termos de funções mais elementares ou familiares. As séries de potência são os exemplos mais clássicos quando se fala de expansão de uma função em série. No entanto, existem outras séries importantes na Matemática, como a série de Fourier, a série de Laurent e a série de Fourier-Bessel que é o foco do nosso estudo. Dessa forma, este trabalho tem como objetivo apresentar as Funções de Bessel e mostrar como representar algumas funções como uma série envolvendo estas funções, que é conhecida como série de Fourier-Bessel. Para isso, apresentaremos alguns aspectos da Equação de Bessel, das Funções de Bessel e das propriedades que permitem expressar funções como uma série das Funções de Bessel. Por fim, com o intuito de ilustrar o procedimento, apresentaremos os gráficos de algumas aproximações utilizando o software *Scilab*.

Palavras-chave: Equação de Bessel. Funções de Bessel. Série de Fourier-Bessel.

1 Introdução

Algumas séries fornecem maneiras de representar funções relativamente complicadas em termos de funções elementares e/ou familiares. Em livros de cálculo diferencial e integral são encontradas formas de expandir uma função f como série de potência. Em especial, são apresentadas as expressões

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \qquad \text{e} \qquad f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,$$

conhecidas, respectivamente, como série de Taylor e de Maclaurin. A ideia neste caso é escrever uma função f em termos das funções mais simples x^n. Claro que isto só é possível com certas hipóteses sobre a função f.

Além das séries de Taylor e de Maclaurin, outras séries são conhecidas na literatura matemática. Uma dessas é a série de Fourier-Bessel. Como o nome sugere, a série de Fourier-Bessel está relacionada com as Funções de Bessel. A ideia central é, com certas hipóteses, escrever uma dada função f como uma soma infinita das Funções de Bessel. Neste caso, as Funções de Bessel não são necessariamente "mais simples", mas podem ser mais adequadas para certas aplicações.

A Função de Bessel de ordem ν, denotada por J_ν, é uma função que satisfaz a equação

$$t^2y''+ty'+(t^2-\nu^2)y=0,$$

com $t > 0$, $y = y(t)$ e $\nu \in \mathbb{R}$, chamada de equação diferencial de Bessel de ordem ν. É importante notarmos que ν não é a ordem da equação diferencial. A "ordem ν" é uma referência específica para a equação de Bessel. A ordem da equação diferencial no sentido da teoria geral das equações diferenciais é 2.

A cada $\nu \in \mathbb{R}$ está associada uma equação de Bessel e sua respectiva solução denotada por J_ν. Isto nos fornece uma família infinita de funções a serem estudadas. Estas funções possuem várias propriedades interessantes. Em particular destacamos a ortogonalidade, que possibilita o estudo da série que envolve as Funções de Bessel.

2 Equação de Bessel e Funções de Bessel

A equação de Bessel está relacionada com vários problemas físicos, dentre eles os que envolvem ondas eletromagnéticas, condução de calor, vibração, difusão, processamento de sinais (filtro de Bessel) e dinâmica de corpos flutuantes. Além disso, recentemente, as Funções de Bessel aparecem no problema inverso da propagação de ondas, com aplicações em medicina, astronomia e imagem acústica. Embora existam todas estas aplicações, neste trabalho estamos interessados apenas no aspecto teórico.

Nesta seção, partiremos da equação de Bessel, buscando sua solução, e definiremos as Funções de Bessel. Procederemos desta forma, pois partir da definição de uma equação e procurar por suas soluções parece ser um caminho mais natural. No entanto, os conceitos poderiam ser definidos, de modo equivalente, partindo das Funções de Bessel e encontrando uma equação para a qual estas funções são soluções. Este processo pode ser encontrado em Bowman (2010).

Para o estudo da equação de Bessel e das Funções de Bessel que faremos neste texto, será suficiente considerar $\nu = n \in \mathbb{N}$. Para o estudo do caso geral, sugerimos ao leitor consultar Okawa (2021) ou Bowman (2010).

A equação diferencial de segunda ordem

$$t^2 y'' + t y' + (t^2 - n^2) y = 0, \tag{1}$$

com $t > 0$, $y = y(t)$ e $n \in \mathbb{N}$ é a equação diferencial de Bessel de ordem n. Como esta é uma equação de segunda ordem, sabemos da teoria das equações diferenciais que ela deve possuir duas soluções linearmente independentes. Ao leitor não familiarizado com a teoria geral das equações diferenciais recomendamos Zill (2016).

A equação diferencial (1) não é uma equação com coeficientes constantes. Vamos encontrar uma solução em forma de série de potências em torno do ponto $t_0 = 0$. Queremos então encontrar uma solução da forma

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{k+r},$$

em que r é uma constante a ser determinada. Sabemos que no intervalo de convergência da série, a série é derivável e podemos obter $y'(t)$ derivando a série termo a termo, mantendo o intervalo de convergência, exceto possivelmente pelos extremos deste intervalo. Deste modo, temos

$$y'(t) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+r)c_k t^{k+r-1},$$

e

$$y''(t) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+r)(k+r-1)c_k t^{k+r-2}.$$

Substituindo agora na equação (1)

$$\begin{aligned}
&t^2y'' + ty' + (t^2-n^2)y \\
&\quad = t^2\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)(k+r-1)c_k t^{k+r-2} + t\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)c_k t^{k+r-1} + (t^2-n^2)\sum_{k=0}^{\infty}c_k t^{k+r} \\
&\quad = \sum_{k=0}^{\infty}(k+r)(k+r-1)c_k t^{k+r} + \sum_{k=0}^{\infty}(k+r)c_k t^{k+r} + \sum_{k=0}^{\infty}c_k t^{k+r+2} - \sum_{k=0}^{\infty}n^2c_k t^{k+r} \\
&\quad = \sum_{k=0}^{\infty}[(k+r)(k+r)-n^2]c_k t^{k+r} + \sum_{k=0}^{\infty}c_k t^{k+r+2} \\
&\quad = t^r\left[(r^2-n^2)c_0 + ((1+r)^2-n^2)c_1t + \sum_{k=0}^{\infty}c_k t^{k+2} + \sum_{k=2}^{\infty}((k+r)^2-n^2)c_k t^k\right] \\
&\quad = t^r\left[(r^2-n^2)c_0 + ((1+r)^2-n^2)c_1t + \sum_{k=2}^{\infty}((k+r)^2-n^2)c_k t^k + \sum_{k=2}^{\infty}c_{k-2}t^k\right] \\
&\quad = t^r\left[(r^2-n^2)c_0 + ((1+r)^2-n^2)c_1t + \sum_{k=2}^{\infty}[((k+r)^2-n^2)c_k + c_{k-2}]t^k\right] = 0.
\end{aligned}$$

Dessa forma, temos que

$$\begin{aligned}
(r+n)(r-n)c_0 &= 0\\
(1+r-n)(1+r+n)c_1 &= 0\\
(k+r-n)(k+r+n)c_k + c_{k-2} &= 0.
\end{aligned}$$

Vamos pedir na primeira equação que $c_0 \neq 0$ pois caso contrário não conseguiremos uma restrição para r. Então, com $c_0 \neq 0$ na primeira equação, temos

$$(r+n)(r-n) = 0, \tag{2}$$

que é chamada de equação indicial. Suas raízes são $r_1 = n$ e $r_2 = -n$. Com a segunda equação, obtemos

$$(1+r-n)(1+r+n)c_1 = 0,$$

que nos conduz a $c_1 = 0$. A terceira equação nos dá uma fórmula recursiva para o cálculo dos coeficientes

$$c_k = -\frac{c_{k-2}}{(k+r-n)(k+r+n)} \qquad k = 2,3,4,\ldots. \tag{3}$$

Agora, se $n \geq 0$, então $r_1 = n$ em (3) nos dá a fórmula de recorrência

$$c_k = -\frac{c_{k-2}}{k(2n+k)} \qquad k = 2, 3, 4, \ldots$$

e como $c_1 = 0$, temos que $c_3 = 0$, $c_5 = 0$, $\ldots$, isto é

$$c_{2k+1} = 0,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Assim, nos resta saber o que acontece com os c_{2k}. Calculando os coeficientes a partir da fórmula, obtemos

$$\begin{aligned}
c_2 &= -\frac{c_0}{2(2n+2)} \\
c_4 &= -\frac{c_2}{4(2n+4)} = \frac{c_0}{4 \cdot 2(2n+2)(2n+4)} \\
c_6 &= -\frac{c_4}{6(2n+6)} = -\frac{c_0}{6 \cdot 4 \cdot 2(2n+2)(2n+4)(2n+6)} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
c_2 &= -\frac{c_0}{1(n+1)2^2} \\
c_4 &= \frac{c_0}{2 \cdot 1(n+1)(n+2)2^4} \\
c_6 &= -\frac{c_0}{3 \cdot 2 \cdot 1(n+1)(n+2)(n+3)2^6} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

e em geral

$$c_{2k} = \frac{(-1)^k c_0}{k!(n+1)(n+2)\cdots(n+k)2^{2k}}. \tag{4}$$

Para facilitar a escrita dos coeficientes, vamos escolher

$$c_0 = \frac{1}{2^n n!}, \tag{5}$$

e utilizando a propriedade do fatorial, notamos que

$$(n+k)(n+(k-1))\cdots(n+2)(n+1)n! = (n+k)!.$$

Note que esta escolha de c_0 é por pura conveniência, pois de acordo com (4), c_0 é uma constante de liberdade da solução da equação. Esta constante de liberdade ficará ajustada quando for imposta uma condição inicial da equação diferencial.

Assim, substituindo (5) em (4), obtemos

$$\begin{aligned}
c_{2k} &= \frac{(-1)^k}{k!(n+k)\cdots(n+2)(n+1)n!2^{2k}2^n} \\
&= \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!2^{2k+n}}.
\end{aligned}$$

Obtemos assim a primeira solução para a equação de Bessel

$$y_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k+n}.$$

A função y_1 definida desta forma é comumente denotada por J_n e conhecida como Função de Bessel de primeira espécie de ordem n. Desta forma,

$$y_1(t) = J_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k+n}. \tag{6}$$

Em particular,

$$J_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}, \tag{7}$$

é a Função de Bessel de primeira espécie de ordem zero. Note que esta é uma série de potências de t e como em toda série de potências, por simplicidade na escrita da série, consideramos $t^0 = 1$ mesmo para $t = 0$. Nestes termos, $J_0(0) = 1$ e também $J_n(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

Como o nosso interesse principal envolve as funções J_n obtidas, não vamos nos preocupar em determinar a segunda solução da equação (1), linearmente independente com J_n. O leitor interessado nesta segunda solução pode consultar Bowman (2010).

A seguir veremos uma propriedade das Funções de Bessel de primeira espécie J_n. Embora estas funções possuam muitas propriedades operatórias importantes, só enunciaremos a propriedade de interesse deste texto. O leitor interessado em mais propriedades das Funções de Bessel de primeira espécie, pode consultar Bowmann (2010).

Proposição 1. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e J_n a Função de Bessel de primeira espécie de ordem n. Então para todo $t \in [0, \infty)$, temos*

i) $\dfrac{d}{dt}(t^n J_n(t)) = t^n J_{n-1}(t)$;

ii) $t\dfrac{d}{dt}J_n(t) = nJ_n(t) - tJ_{n+1}(t)$.

Prova. De acordo com a definição da função J_n,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(t^n J_n(t)) &= \frac{d}{dt} t^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+n}}{2^{2k+n} k!(n+k)!} \\
&= \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+2n}}{2^{2k+n} k!(n+k)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+2n) t^{2k+2n-1}}{2^{2k+n} k!(n+k)(n+k-1)!} \\
&= t^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2(k+n) t^{2k+n-1}}{2^{2k+n} k!(n+k)(n+k-1)!}
\end{aligned}$$

$$= t^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!((n-1)+k)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k+n-1} = t^n J_{n-1}(t).$$

Para a segunda expressão, temos que a igualdade é trivialmente satisfeita para $t = 0$, já que $J_n(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Agora, para $t \neq 0$, temos que

$$\frac{d}{dt}(t^{-n} J_n(t)) = \frac{d}{dt}\left(t^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+n}}{2^{2k+n} k!(n+k)!}\right) = \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{2^{2k+n} k!(n+k)!}$$

e observe que agora o caso $k = 0$ é constante. Então

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(t^{-n} J_n(t)) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k) t^{2k-1}}{2^{2k+n} k!(n+k)(n+k)!} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k-1}}{2^{2k+n-1}(k-1)!(n+k)(n+k)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^(k+1) t^{2(k+1)-1}}{2^{2(k+1)+n-1}(k+1-1)!(n+k+1)(n+k+1)!} \\
&= -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{2^{2k+n+1} k!(n+k+1)(n+k+1)!} \\
&= -t^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+n+1}}{2^{2k+n+1} k!(n+1+k)(n+1+k)!} = -t^{-n} J_{n+1}(t).
\end{aligned}$$

Desta forma,

$$-t^{-n} J_{n+1}(t) = \frac{d}{dt}(t^{-n} J_n(t)) = -n t^{-n-1} J_n(t) + t^{-n} J_n'(t),$$

e multiplicando ambos os membros por t^{n+1} vem

$$-t J_{n+1}(t) = -n J_n(t) + t J_n'(t),$$

e a igualdade desejada. □

Podemos generalizar um pouco mais os resultados da Proposição 1. Note que, nas hipóteses da Proposição, para qualquer $\alpha \in (0, \infty)$, temos

$$\frac{d}{dt}(t^n J_n(\alpha t)) = \alpha t^n J_{n-1}(\alpha t), \tag{8}$$

e também

$$t \frac{d}{dt} J_n(\alpha t) = n J_n(\alpha t) - \alpha t J_{n+1}(\alpha t). \tag{9}$$

A ortogonalidade das funções de Bessel é um dos resultados mais importantes e que permite definirmos a série de Fourier-Bessel. Vamos agora definir o produto interno que utilizaremos no espaço vetorial $\mathcal{C}((0,1);\mathbb{R})$.

Definição 2. Seja V um espaço vetorial real. Um produto interno sobre V é uma aplicação

$$\begin{aligned}
\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V &\to \mathbb{R} \\
(u, v) &\mapsto \langle u, v \rangle
\end{aligned}$$

que satisfaz

i) $\langle u, u\rangle \geq 0$ e além disso, $\langle u, u\rangle = 0$ se e somente se $u = 0$;

ii) $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$;

iii) $\langle \alpha u, v\rangle = \alpha\langle u, v\rangle$;

iv) $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$,

para todos $u, v \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

Proposição 3. *Sejam* $\mathcal{C} = C^0((0,1);\mathbb{R})$ *o espaço vetorial das funções contínuas de* $(0,1)$ *em* $\mathbb{R}$. *A aplicação*

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot\rangle &: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathbb{R} \\ (f, g) &\mapsto \langle f, g\rangle = \int_0^1 t f(t) g(t) dt \end{aligned} \tag{10}$$

é um produto interno sobre o espaço $\mathcal{C}$.

Não é difícil provar que esta função satisfaz as propriedades (i)-(iv) da definição de produto interno. Basta usar as propriedades das integrais e da multiplicação de números reais.

Agora que já temos um produto interno, podemos falar da ortogonalidade das Funções de Bessel. Vamos ver que essa ortogonalidade está relacionada com as raízes da equação $J_n(t) = 0$. Em Bowman (2010), encontramos que, se ν é um número real qualquer, a equação $J_\nu(t) = 0$ possui infinitas raízes reais não negativas.

Considerando uma Função de Bessel específica J_n e as suas infinitas raízes reais positivas α_i, para $i \in \mathbb{N}^*$, com $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \cdots < \alpha_n < \cdots$, construímos o conjunto

$$\{J_n(\alpha_i t); \quad i \in \mathbb{N}^*\} \subset \mathcal{C}.$$

Vamos provar que este conjunto é um conjunto de funções ortogonais em relação ao produto interno considerado em (10). Para as próximas proposições observemos que uma função $J_n(\alpha t)$ satisfaz a equação diferencial

$$t^2 y'' + t y' + (\alpha^2 t^2 - n^2) y = 0. \tag{11}$$

De fato, como $J_n(t)$ é solução da equação

$$t^2 y'' + t y' + (t^2 - n^2) y = 0,$$

fazendo $x = \alpha t$, obtemos

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = \alpha\frac{dy}{dx}$$

e

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)\frac{dx}{dt} = \alpha^2\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Substituindo em (11), temos

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2\alpha^2\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{x}{\alpha}\right)\alpha\frac{dy}{dx}+\left(\alpha^2\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2-n^2\right)y=0,$$

e então

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-n^2)y=0,$$

que é a equação de Bessel de ordem n na variável x, cuja solução é $J_n(x)$. E como $x=\alpha t$, temos que $J_n(\alpha t)$ é solução de (11).

Proposição 4. *Se J_n é uma Função de Bessel de ordem n e α_i para $i\in\mathbb{N}^*$ são as raízes positivas da função J_n, então o conjunto*

$$\{J_n(\alpha_i t);\quad i\in\mathbb{N}^*\},$$

é ortogonal em relação ao produto interno em (10)*.*

Prova. Precisamos provar que dadas duas funções distintas deste conjunto, o produto interno entre estas duas funções se anula. De outra forma, se α_1 e α_2 são duas raízes positivas distintas de J_n, então

$$\langle J_n(\alpha_1 t),J_n(\alpha_2 t)\rangle=0.$$

Notemos que $u=J_n(\alpha_1 t)$ é uma solução da equação

$$tu''+u'+\left(\alpha_1^2-\frac{n^2}{t^2}\right)tu=0, \tag{12}$$

e $v=J_n(\alpha_2 t)$ é solução de

$$tv''+v'+\left(\alpha_2^2-\frac{n^2}{t^2}\right)tv=0. \tag{13}$$

Multiplicando (12) por v e (13) por u, encontramos

$$tvu''+vu'+\left(\alpha_1^2-\frac{n^2}{t^2}\right)tuv=0,$$

e

$$tuv''+uv'+\left(\alpha_2^2-\frac{n^2}{t^2}\right)tuv=0,$$

e subtraindo a segunda da primeira, vem

$$t(vu''-uv'')+(vu'-uv')+(\alpha_1^2-\alpha_2^2)tuv=0,$$

que pode ainda ser escrito como

$$\frac{d}{dt}(t(u'v-uv'))=(\alpha_2^2-\alpha_1^2)tuv.$$

Integrando ambos os membros em t, no intervalo $(0,1)$, obtemos

$$(\alpha_2^2-\alpha_1^2)\int_0^1 tuv\,dt=t(u'v-uv')\big|_{t=0}^1,$$

e substituindo u e v,

$$(\alpha_2^2 - \alpha_1^2) \int_0^1 tJ_n(\alpha_1 t)J_n(\alpha_2 t)dt = t(J_n'(\alpha_1 t)J_n(\alpha_2 t) - J_n(\alpha_1 t)J_n'(\alpha_2 t))\Big|_{t=0}^1$$
$$= J_n'(\alpha_1)J_n(\alpha_2) - J_n(\alpha_1)J_n'(\alpha_2).$$

Como α_1 e α_2 são raízes de J_n e $\alpha_1^2 \neq \alpha_2^2$, então

$$\int_0^1 tJ_n(\alpha_1 t)J_n(\alpha_2 t)dt = 0,$$

donde $\langle J_n(\alpha_1 t), J_n(\alpha_2 t)\rangle = 0$ e então $J_n(\alpha_1 t)$ e $J_n(\alpha_2 t)$ são ortogonais em relação ao produto interno em (10). Como α_1 e α_2 são duas raízes arbitrárias, isso vale para todo par de raízes diferentes da função J_n. □

Proposição 5. *Se J_n é uma Função de Bessel de ordem n e α é qualquer uma das raízes da função J_n, então*

$$\langle J_n(\alpha t), J_n(\alpha t)\rangle = \frac{1}{2}J_{n+1}^2(\alpha) > 0. \tag{14}$$

Prova. Primeiramente a equação (11) pode ser reescrita como

$$(ty')' + \left(\alpha^2 t - \frac{n^2}{t}\right) y = 0, \tag{15}$$

e $y = J_n(\alpha t)$ é ainda uma solução desta equação.

Dessa forma, temos que

$$(ty')' = \left(\frac{n^2}{t} - \alpha^2 t\right) y,$$

e multiplicando a equação por $2tJ_n'(\alpha t)$ e substituindo $y = J_n(\alpha t)$, temos

$$2tJ_n'(\alpha t)(tJ_n'(\alpha t))' = 2(n^2 - \alpha^2 t^2)J_n(\alpha t)J_n'(\alpha t),$$

e então

$$\frac{d}{dt}\left((tJ_n'(\alpha t))^2\right) = (n^2 - \alpha^2 t^2)\left((J_n(\alpha t))^2\right)'.$$

Vamos integrar os dois lados da igualdade no intervalo $(0, 1)$. Para o lado esquerdo da igualdade, usamos (9) e obtemos

$$(tJ_n'(\alpha t))^2\Big|_{t=0}^1 = (nJ_n(\alpha t) - \alpha t J_{n+1}(\alpha t))^2\Big|_{t=0}^1$$
$$= (nJ_n(\alpha) - \alpha J_{n+1}(\alpha))^2 - (nJ_n(0))^2 = \alpha^2 J_{n+1}^2(\alpha),$$

já que $nJ_n(\alpha) = nJ_n(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Já para o lado direito, encontramos a integral

$$\int_0^1 (n^2 - \alpha^2 t^2)(J_n^2(\alpha t))'dt.$$

Vamos aplicar uma integral por partes fazendo $u = n^2 - \alpha^2 t^2$ e $\frac{dv}{dt} = (J_n^2(\alpha t))'$, e assim $\frac{du}{dt} = -2\alpha^2 t$ e $v = J_n^2(\alpha t)$. Logo

$$\int_0^1 (n^2 - \alpha^2 t^2)(J_n^2(\alpha t))' dt = \left[(n^2 - \alpha^2 t^2) J_n^2(\alpha t)\right]_{t=0}^1 + 2\alpha^2 \int_0^1 t J_n^2(\alpha t) dt$$
$$= (n^2 - \alpha^2) J_n^2(\alpha) - n^2 J_n^2(0) + 2\alpha^2 \int_0^1 t J_n^2(\alpha t) dt.$$

Notemos que, $(n^2 - \alpha^2) J_n^2(\alpha) - n^2 J_n^2(0) = 0$, pois α é raiz de $J_n(t)$. Da série de potências (6) vemos que $J_n(0) = 0$ para todo $n \neq 0$, e para o caso em que $n = 0$, temos $n^2 = 0$, donde $n^2 J_n^2(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Segue que,

$$\int_0^1 (n^2 - \alpha^2 t^2)(J_n^2(\alpha t))' dt = 2\alpha^2 \langle J_n(\alpha t), J_n(\alpha t)\rangle.$$

Juntando então os dois lados da igualdade, obtemos

$$2\alpha^2 \langle J_n(\alpha t), J_n(\alpha t)\rangle = \alpha^2 J_{n+1}^2(\alpha),$$

e assim,

$$\langle J_n(\alpha t), J_n(\alpha t)\rangle = \frac{1}{2} J_{n+1}^2(\alpha).$$

Bowman (2010) afirma que as funções J_n e J_{n+1} não possuem raízes em comum. Assim, como α é raiz de J_n, então α não é raiz de J_{n+1}, donde o último termo da última equação é estritamente positivo. $\square$

Agora que provamos a ortogonalidade das funções de Bessel, podemos tratar da série de Fourier-Bessel.

3 A série de Fourier-Bessel

Como já vimos anteriormente as funções $J_n(\alpha_i t)$, em que α_i é raiz de $J_n(t) = 0$, são funções duas a duas ortogonais em relação a função t e vimos também que a equação $J_n(t) = 0$ possui infinitas raízes. Logo, a família das funções $J_n(\alpha_i t)$ forma uma base de Hilbert para o espaço vetorial $\mathcal{C} = C^0((0,1);\mathbb{R})$ das funções contínuas com domínio $(0,1)$. Dessa forma, enunciamos o próximo teorema.

Teorema 6. *Sejam $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \cdots < \alpha_k < \cdots$ as raízes positivas da equação $J_n(t) = 0$, com $n \geq 0$, e $f \in \mathcal{C}$. Então f pode ser escrita na forma*

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k J_n(\alpha_k t), \tag{16}$$

que é chamada de série de Fourier-Bessel de ordem n da função f. Além disso, a equação $J_n(t) = 0$ é chamada de condição de contorno.

Neste trabalho não argumentaremos sobre a demonstração deste resultado. No entanto, Watson (1922) faz uma discussão sobre este tipo de expansão em série provando sua veracidade. A questão que daremos atenção é como determinar os coeficientes C_k admitindo que uma função f possa ser escrita como uma série da forma (16).

Admitindo que uma função $f \in \mathcal{C}$ possa ser escrita na forma (16), temos que

$$f(t) = C_1 J_n(\alpha_1 t) + C_2 J_n(\alpha_2 t) + C_3 J_n(\alpha_3 t) + \cdots .$$

Para determinar o coeficiente C_k, tomamos o produto interno desta igualdade com a função $J_n(\alpha_k t)$, e como $\langle C_i J_n(\alpha_i t), C_k J_n(\alpha_k t)\rangle = 0$ para todo $i \neq k$, resta

$$\langle f(t), J_n(\alpha_k t)\rangle = \langle C_k J_n(\alpha_k t), J_n(\alpha_k t)\rangle = C_k \langle J_n(\alpha_k t), J_n(\alpha_k t)\rangle,$$

donde

$$C_k = \frac{\langle f(t), J_n(\alpha_k t)\rangle}{\langle J_n(\alpha_k t), J_n(\alpha_k t)\rangle}.$$

Utilizando a definição do produto interno e a igualdade (14), obtemos

$$C_k = \frac{2}{(J_{n+1}(\alpha_k))^2} \int_0^1 t f(t) J_n(\alpha_k t) dt,$$

para todo $k \in \mathbb{N}^*$.

4 Exemplos de funções escritas como série de Fourier-Bessel

Nesta seção, faremos alguns exemplos de funções escritas como séries de Fourier-Bessel e faremos alguns testes utilizando o software *Scilab*[1] para analisarmos a aproximação das séries com relação a função original. Neste contexto, utilizaremos funções simples que nos permitam uma fácil comparação de resultados. Além disso, o uso de funções mais simples facilitará o trabalho analítico com o produto interno definido em (10). Para um grande conjunto de funções o produto interno necessitará de métodos numéricos.

Como primeiro exemplo, vamos escrever a função $f(t) = 1$ no intervalo $(0, 1)$ como uma série de Fourier-Bessel de ordem 0. Queremos então escrever

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k J_0(\alpha_k t),$$

sendo α_k as infinitas raízes da função J_0. Como já vimos,

$$C_k = \frac{2}{(J_{n+1}(\alpha_k))^2} \int_0^1 t f(t) J_n(\alpha_k t) dt,$$

isto é,

$$C_k = \frac{2}{(J_1(\alpha_k))^2} \int_0^1 t J_0(\alpha_k t) dt.$$

[1] Software livre, versão , que pode ser obtido em https://www.scilab.org/.

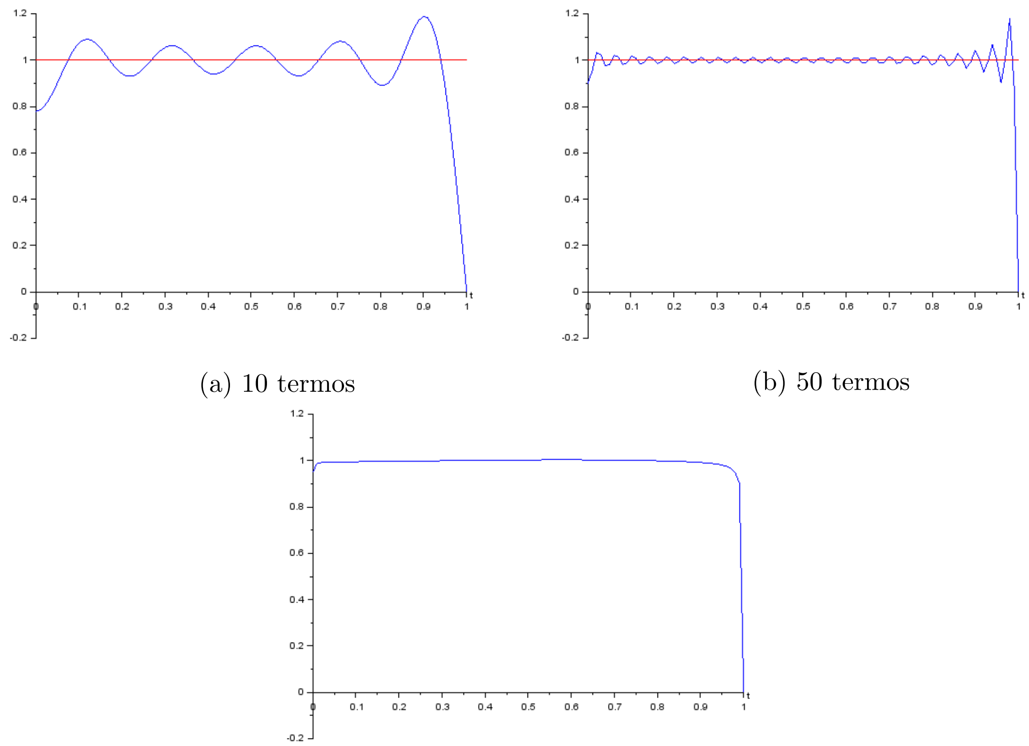
Usando a identidade (8) temos

$$\begin{aligned}
C_k &= \frac{2}{(J_1(\alpha_k))^2}\frac{1}{\alpha_k}\int_0^1 \alpha_k t J_0(\alpha_k t)dt \\
&= \frac{2}{(J_1(\alpha_k))^2}\frac{1}{\alpha_k}\int_0^1 \frac{d}{dt}(tJ_1(\alpha_k t))dt \\
&= \frac{2}{(J_1(\alpha_k))^2}\frac{1}{\alpha_k}(tJ_1(\alpha_k t))_{t=0}^{1} \\
&= \frac{2}{(J_1(\alpha_k))^2}\frac{1}{\alpha_k}J_1(\alpha_k) = \frac{2}{\alpha_k J_1(\alpha_k)},
\end{aligned}$$

donde obtemos

$$f(t) = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_0(\alpha_k t)}{\alpha_k J_1(\alpha_k)}. \tag{17}$$

Podemos considerar alguns termos da série em (17) para gerar um gráfico ilustrativo do comportamento da série. A Figura 1 mostra exemplos com 10, 50 e 200 termos.



(a) 10 termos

(b) 50 termos

(c) 200 termos

Figura 1: Representações gráficas para a expansão de $f(t) = 1$.

Observemos que para calcular os k_0 primeiros termos da série, precisamos das raízes α_k da função J_n para $k = 1, 2, \ldots, k_0$.

Como segundo exemplo, vamos escrever a função $f(t) = t$ no intervalo $(0, 1)$ como uma expansão em série de Fourier-Bessel de ordem 1. Queremos então escrever

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k J_1(\alpha_k t).$$

Calculando os coeficientes, temos

$$C_k = \frac{2}{(J_2(\alpha_k))^2} \int_0^1 t^2 J_1(\alpha_k t)dt,$$

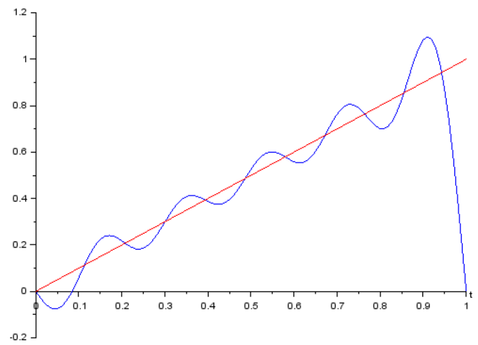
e usando novamente a identidade (8) obtemos

$$\begin{aligned} C_k &= \frac{2}{(J_2(\alpha_k))^2} \frac{1}{\alpha_k} \int_0^1 \alpha_k t^2 J_1(\alpha_k t)dt \\ &= \frac{2}{(J_2(\alpha_k))^2} \frac{1}{\alpha_k} \int_0^1 \frac{d}{dt}(t^2 J_2(\alpha_k t))dt \\ &= \frac{2}{(J_2(\alpha_k))^2} \frac{1}{\alpha_k} (t^2 J_2(\alpha_k t))_{t=0}^1 \\ &= \frac{2}{(J_2(\alpha_k))^2} \frac{1}{\alpha_k} J_2(\alpha_k) = \frac{2}{\alpha_k J_2(\alpha_k)}, \end{aligned}$$

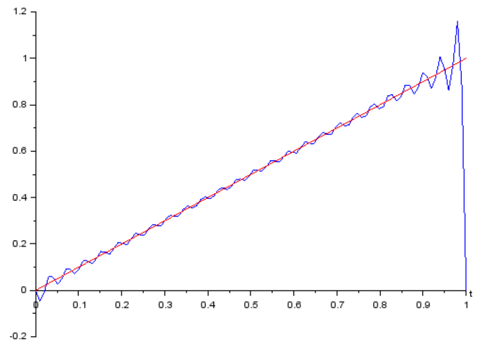
donde obtemos

$$f(t) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1(\alpha_k t)}{\alpha_k J_2(\alpha_k)}. \tag{18}$$

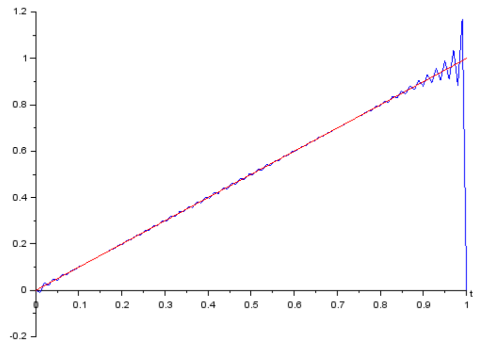
A Figura 2 mostra aproximações da série com 10, 50 e 100 termos.



(a) 10 termos



(b) 50 termos



(c) 100 termos

Figura 2: Representações gráficas para a expansão de $f(t) = t$.

Notemos que nestes dois exemplos apresentados, os gráficos da série de Fourier-Bessel convergem para o gráfico da função original. Mas próximo de $t = 1$ elas decrescem até atingir a imagem igual a zero em $t = 1$. Esse comportamento se assemelha ao fenômeno de Gibbs que acontece próximo de pontos de descontinuidade nas aproximações de funções por série de

Fourier. No caso das séries de Fourier-Bessel, esse comportamento ocorre pois em $t = 1$ todos os termos da série se anulam já que α_k são as raízes de J_n.

Assim, a série de Fourier-Bessel converge para a função original, mas em $t = 1$ a série é sempre igual a zero devido à condição de contorno com a qual estamos trabalhando. Dessa forma, próxima de $t = 1$ a função apresenta uma grande oscilação e depois um rápido decrescimento pois as funções J_n são contínuas e por isso essa transição é feita de modo contínuo.

De maneira geral, estes dois exemplos apresentados podem ser generalizados. Consideremos $f(t) = t^m$ para $m \in \mathbb{N}$ fixado, e queremos escrever

$$f(t) = t^m = \sum_{k=1}^{\infty} C_k J_m(\alpha_k t),$$

em que α_k são as (infinitas) raízes positivas da função J_m.

Procedendo de modo análogo aos dois exemplos anteriores, temos os coeficientes C_k dados por

$$C_k = \frac{2}{(J_{m+1}(\alpha_k))^2} \int_0^1 t^{m+1} J_m(\alpha_k t)dt,$$

isto é,

$$C_k = \frac{2}{\alpha_k J_{m+1}(\alpha_k)},$$

e assim, temos que

$$t^m = f(t) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_m(\alpha_k t)}{\alpha_k J_{m+1}(\alpha_k)}.$$

Observe que para a função $f(t) = t^m$ escolhemos a Função de Bessel J_m. Isto porque os coeficientes podem ser determinados de forma analítica. Nada impediria escolhermos outra função J_n com índice n diferente da potência m, mas teríamos daí que recorrer a métodos numéricos para calcular os coeficientes.

Considerações finais

Com base no exposto neste trabalho, conseguimos boas aproximações para as funções do tipo t^n no intervalo $(0, 1)$ utilizando séries de Fourier-Bessel de ordem n. Ao estudarmos as propriedades das funções de Bessel de primeira espécie, em especial a ortogonalidade existente na família dessas funções, vimos que essa ortogonalidade se dá em relação à função t e que depende das raízes da equação $J_n(t) = 0$. Esta última restrição, que chamamos de condição de contorno, nos permite encontrar aproximações, ou expansões, de funções em série de Fourier-Bessel no intervalo $(0, 1)$. No entanto, é possível trabalhar com intervalos maiores mudando a condição de contorno envolvida. Sendo assim, um estudo futuro pode envolver expansões de outras funções em série de Fourier-Bessel e também em intervalos maiores.

Agradecimentos

Os autores agradecem às professoras Sandra Maria Tieppo e Simone Aparecida Miloca, pelas contribuições feitas em um trabalho anteriore que originou este texto.

Referências

Bowman, Frank. *Introduction to Bessel Functions.* New York: Dover Publications, 2010.

Okawa, Cintya A. *Um estudo sobre a série de Fourier-Bessel.* Monografia (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE. Cascavel - Pr, p. 63. 2021.

Watson, G. N. *Theory of Bessel function.* London: Cambridge University Press, 1922.

Zill, Dennis G. *Equações diferenciais com aplicações em modelagem.* 3^a edição. São Paulo: Cengage Learning, 2016.